فصلنامه پژوهش در علوم، مهندسی و فناوری

دوره ۸، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۱

صفحات ۱۰۷-۱۱۷

ISSN: 2476-5082

www.uctjournals.com

بررسی ساختار و ویژگی‌های نگاشت‌های هم پیوسته

پوهنیار محمد اصغر انوری

عضو کادر علمی دانشکده تعلیم و تربیه دانشگاه بلخ

Asghar.anwari55@gmail.com

چکیده

مفهوم همگی در اواخر قرن نوزدهم توسط ریاضیدانان ایتالیایی سزار آرزلا و جیولو آسکولی معرفی شد. در سال (۱۸۸۳) آسکولی شرایط کافی برای فشردگی را بیان و آلارد در سال (۱۸۹۵) شرایط لازم و اولین نتیجه آن را ارائه داد. این پژوهش به بیان قضیه ها و مفاهیم مرتبط با نگاشت های همه ، (ویژگی های نگاشت های همپویسته، ساختار نگاشت های همپیوسته، نتایج نگاشت های همپیوسته و گراف نگاشت های همپیوسته) میپردازیم.

کلیدواژه: نگاشت همپیوست، توابع همپیوسته، گراف های متناهی

فصلنامه پژوهش در علوم، مهندسی و فناوری
دوره ۸، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۱، صفحات ۱۰۷-۱۱۷

ویژگی نگاشت های همپیوسته

فرض کنید (X,d) فضای متریک و $f:X\to X$ تابعی پیوسته باشد. فرض کنید $V\subset X$ و $r>0$ همسایگی بسته شامل V به شعاع $r>0$ عبارت از $B(V,r)=\{y\in X: d(y,V)\le r\}$ که در ان $d(y,V)=inf\{d(x,v): v\in V\}$

مجموعه تکراری های x تحت f را به صورت $O(x,f)=\{f^n(x): n=0,..,N\}$ و مجموعه نقاط ω_حد تحت f را $\omega(x,f)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{O(f^n(x),f)}$ تعریف میکنیم.

نقطه x را نقطه غیر سرگردان fگوییم اگر برای $m=m_\varepsilon\in N, \varepsilon>0$ موجود باشد که $f^m\big(B(x,\varepsilon)\big)\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset$ نقطه x تقریبا متناوب است اگر برای $m=m_\varepsilon\in N, \varepsilon>0$ موجود باشد که $d(x,\{f^{n+i}(x): i=0,..,N\}$ برای هر $n\in N=$ مجموعه نقاط غیر سرگردان f را با $\Omega(f)$ و مجموعه نقاط بازگشتی را با $R(f)$ و مجموعه نقاط تقریبا متناوب را با $Ap(f)$نمایش می دهیم. [1]

fرا به طور نقطه وار بازگشتی گوییم اگر $R(f)=X$ به وضوح $\Omega(f)$ زیر مجموعه بسته ای از X است. تابع $f:X\to X$ را هم پیوسته گوییم اگر برای هر $\varepsilon>0, \delta>0$ ای موجود باشد که

$$\forall x,y(d(x,y)<\delta\Rightarrow d(f^n(x),f^n(y))<\varepsilon, \forall n\in N$$

در واقع $f:X\to X$ همپیوسته است اگر تابع $\eta: (0,\infty)\to(0,\infty)$ موجود باشد که در شرط ذیل صدق نماید:

$$(E)\forall\varepsilon>0, \forall n\in N, \forall x,y\in X(d(x,y)\le\eta(\varepsilon)\Rightarrow\eta(\varepsilon)<\varepsilon, d(f^n(x),f^n(y))\le\varepsilon$$

گزاره 1

فرض کنید $f:X\to X$ یک نگاشت همپیوسته باشد آنگاه$R(f)$ زیر مجموعه بسته X است . به ویژه $R(f)=\Omega(f)$

برهان: فرض کنید $R(f)=\Omega(f)$دراین صورت$R(f)$ - $\Omega x\in(f)$و $\varepsilon>0$ به قسمی موجوند که $d(x,O(f(x),f))>\varepsilon$ فرض کنید $\eta: (0,\infty)\to(0,\infty)$ یک نگاشت همپیوسته باشد. $\eta(\varepsilon)$ را برابر با δ در نظر میگیریم. آنگاه $y\in B(0,\delta)$ و $n\in N$ به قسمی موجودند که $f^n(y)\in B(0,\delta)$ ایجاب میکند $d\big(f^n(x),f^n(y)\big)>2\varepsilon-\delta$ که با شرط (E) در تناقض است. لذا$R(f)=\Omega(f)$.

فرض کنید $V\subset X$ ان گاه V را مجموعه f_ناوردا یا مجموعه ناوردا می نامیم هرگاه $f(V)\subset V$ اگر V کوچکترین زیر مجموعه سره f_ناوردا بسته از X باشد آنگاه V را مجموعه مینیمال گوییم. توجه داشته باشید که هر نقطه ا مجموعه منیمال یک نقطه بازگشتی است.

گزاره۲- فرض کنید $f:X\to X$ یک نگاشت هم پیوسته باشد و برای$x\in X$ ، $\omega(x,f)\neq0$ آن گاه $\omega(x,f)$مجموعه مینیمال است.

برهان: می دانیم $\omega(x,f)$ یک مجموعه بسته f_ناورداست. فرض کنید $\omega(x,f)$ مینیمال باشد. آنگاه $x,\omega \in \omega(x,f)$ به قسمی موجودند که ω عضو $\overline{O(v,f)}$ نباشد فرض کنید $\varepsilon = \frac{d(\omega,O(v,f))}{2}$ و :
$\eta(0,\infty) \to (0,\infty)$ یک نگاشت هم پیوسته باشد. $y \in O(x,f)$ به قسمی در نظر بگیرید که $d(y,v) < \eta()$ در اینصورت برای هر $d(f^n(y),O(v,f)) \leq \varepsilon, n \in N$ ایجاب میکند $d(f^n(y),\omega) > 2\varepsilon$ و همچنین ω عضو $\omega(x,f) = \omega(y,f)$ نباشد که تناقض است. لذا $\omega(x,f)$ مینیمال است. [2]

توجه داشته باشید که اگر $x \in R(f)$ ان گاه $\omega(x,f) = \overline{O(v,f)} \neq \emptyset$.

در ادامه به بیان اثبات گزاره های حول نگاشت های ایزومتریک و غیر انبساطی می پردازیم.

گزاره۳_ فرض کنید $f: X \to X$ یک نگاشت همپیوسته باشد. اگر $R(f)$ فشرده و $f|_{R(f)}$ غیر انبساطی باشد. ان گاه $f|_{R(f)}: R(f) \to R(f)$ یک نگاشت همریختی ایزومتریک است.

برهان: فرض کنید $X=R(f)$در این صورت f نگاشتی یک به یک است.(در واقع اگر $v,\omega \in X$ به قسمی موجود باشد که $f(v)=f(\omega)$ آنگاه v,ω به یک مجموعه مینیمال تعلق دارند و همپیوستگی ایجاب میکند نقطه $(v,\omega) \in X \times X$ برای نگاشت $f \times f$ یک نقطه بازگشتی است و در نتیجه $v = \omega$ لذا f یک همریختی است و هر نقطه $(x,y) \in X \times X$ تحت $f \times f$ یک نقطه بازگشتی (تقریبا متناوب) است.

گزاره ۴- فرض کنید $f: X \to X$ یک نگاشت همپیوسته باشد. اگر X مجموعه ای فشرده باشد. آن گاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(x) = R(f)$.

برهان از ان جایی کهX فشرده است $f(R(f))=R(f)$ لذا $R(f) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(x) = R(f)$ ، . برعکس، به ازای هر $x_0 \epsilon \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(x)$ ، نقاط $y_1, y_2, \ldots$ ، در X به قسمی موجودند که به ازای هر $n \in N$، $x_0 f^n(x)=$.

فرض کنید $\eta: (0,\infty) \to (0,\infty)$ یک نگاشت همپیوسته باشد. چون X فشرده است.لذا اعداد صحیح $x_0 \epsilon X, 0 < k_1 < k_2 < \cdots$ به قسمی موجودند که به ازای هر $n \in N$:

$$d(y_{kn}, y_0) \leq \eta\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow d(f^{k_n}(y_0), x_0) = d\left(f^{k_n}(y_0), f^{k_n}(y_{k_n})\right) \leq \left(\frac{1}{n}\right)$$

لذا بنا بر گزاره ۲ $x_0 \epsilon \omega(y_0,f) \subset R(f)$ سپس $R(f) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(x)$.

توجه داشته باشید که هر نگاشت پیوسته روی فضای متریک، یک نگاشت پیوسته یکنواخت است.

گزاره ۵- فرض کنید X فشرده و $f: X \to X$ پیوسته باشد. آن گاه

۱)به ازای هر $k \in N$، f^k همپیوسته است اگر و تنها اگر همپیوسته باشد.

۲) اگر X_0 یک زیر مجموعه-f- ناوردا از باشد و $m \in N$ به قسمی موجود باشد که $f^m(X) \subset X_0$ ، آن گاه f همپیوسته است اگر و تنها اگر $f|_{X_0}$ همپیوسته باشد.

ساختار نگاشت های همپیوسته

فرض کنید (X,d) و (Y,ρ) دو فضای متریک و $h: X \to Y$ یک نگاشت دو سویی باشد. اگر h, h^{-1} پیوسته یکنواخت باشند. آنگاه hرا همریختی یکنواخت می گوییم.

فرض کنید $g: Y \to Y$ $f: X \to X$ ، نگاشت های پیوسته باشند. در این صورت f و g را به طور یکنواخت مزدوج گوئیم هرگاه همریختی یکنواخت $h: X \to Y$ به قسمی موجود باشد که $hf=gh$. در این حالت h را مزدوج یکنواخت ازf بهg می نامیم.

توجه داشته باشید که اگر (X,d) فشرده باشد، آنگاه هر همریختی از X به Y(در صورت وجود) یک همریختی یکنواخت است و هر مزدوج توپولوژیکی از به یک مزدوج یکنواخت است. فرض کنید d,d^l دو متر روی Xباشند. اگر نگاشت هماهنی $id_x: (X,d) \to (X,d)$ یک همریختی یکنواخت باشد. ان گاه dو d^l را به طور یکنواخت معادل می نامیم.

قضیه۱ : فرض کنید (X,d)یک فضای متریک و $f: (X,d) \to (X,d)$ نگاشت همپیوسته باشد. فرض کنید $R(f)$فشرده باشد ان گاه

۱) نگاشت f تحت متر d_f یک نگاشت غیر انبساطی است و $f|_{R(f)}: R(f) \to R(f)$ یک همریختی ایزومتریک است.

۲) اگر به ازای هر $x \in X$,$\omega(x,f) \neq \emptyset$ ان گاه نگاشت انقباضی $\gamma: X \to R(f)$ به قسمی موجود است که $\gamma f = f\gamma$

$$(1) \lim_{n\to\infty} d\left(f^{k_n}(x), f^{k_n}(\gamma(x))\right) = 0 \quad ,\forall x \epsilon X$$

و γ تحت d_fیک نگاشت غیر انبساطی است.

برهان(۱) نگاشت f تحت متر d_f غیر انبساطی است و همچنین بنا بر گزاره3, $f|_{R(f)}: R(f) \to R(f)$ یک همریختی ایزومتریک است.

(۲)با توجه به اینکه برای هر $x \in X$, $\omega(x,f) \neq \emptyset$ بنا به گزاره ۲ $y \epsilon \omega(x,f) \subset R(f$ و اعداد صحیح $0 < n_1 < n_2 <..$ به قسمی موجودند که برای هر $i \in N$,$d(f^{k_n}(x), y) \leq \frac{1}{2^i}$. با توجه به گزاره ۱ در این قضیه برای هر $\omega_0 \in R(f), i \in N$ به قسمی موجود است که $f^{n_i}(\omega_i) =$ چون $R(f)$ فشرده است، دنباله $\omega_1, \omega_2, \ldots$ دارای زیر دنباله همگرا به نقطه $v = v_x \in R(f)$ است. برای راحتی فرض کنید دنباله $\omega_1, \omega_2, \ldots$ به v همگراست و برای هر $i \in N$,$d(\omega_i, v) \leq \frac{1}{2^i}$ است. لذا برای هر $n_j < j$.

$$d_f\left(f^j(x),f^j(v)\right) \le d_f\left(f^{n_i}(x),f^{n_i}(v)\right) \le d_f\left(f^{n_i}(x),y\right) \le d_f\left(f^{n_i}(\omega_i),f^{n_i}(v)\right) \le \frac{1}{2^i}+d(\omega_i,v) \le \frac{1}{2^{i-1}}$$

که ایجاب میکند:

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x),f^n(v)\right) = \lim_{n\to\infty} d_f\left(f^n(x),f^n(v)\right) = 0$$

فرض کنید $\gamma(x)=v=v_x$ ان گاه نشان میدهیم که $\gamma: X\to R(f)$ در رابطه (1) صدق میکند. برای هر $u\in R(f)-\{v_x\}$ با توجه به اینکه

$$\lim_{n\to\infty} d_f\left(f^n(x)),f^n(u)\right) = \lim_{n\to\infty} d_f\left(f^n(v),f^n(u)\right) = d_f(v,u) > 0 \quad ,\forall x \epsilon X$$

لذا $\liminf_{n\to\infty} d\left(f^n(x)),f^n(u)\right) > 0$ پس نگاشت $\gamma: X\to R(f)$، در رابطه (1) صدق میکند و یکتاست. با توجه به (1) نشان دادیم که

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(f(x)),f^n(\gamma(x))\right) = 0 \quad ,\forall x \epsilon X$$

که بنا به یکتایی γ $\gamma f=f\gamma,$ هم چنین برای هر $x,y\epsilon X$

$$d\left((\gamma(x),\gamma(y)\right) = \lim_{n\to\infty} d_f\left(f^n\left((\gamma(x))\right),f^n(\gamma(y))\right) = \lim_{n\to\infty} d_f\left(f^n(x),f^n(y)\right) \le d_f(x,y) > 0 \quad ,\forall x \epsilon X$$

لذا γ نگاشتی پیوسته و تحت متر d_f، غیر انبساطی است. از طرفی به ازای هر $\gamma(\omega)=\omega, \omega\in R($.

سپس γ نگاشتی انقباضی است.

قضیه ۲: فرض کنید (X,d)یک فضای متریک و $f: X\to X$ یک نگاشت پیوسته باشد. فرض کنید $R(f)$ فشرده و $\omega(x,f)$ به ازای هر $x\epsilon X$ ناتهی باشد. آنگاه fهم پیوسته است اگر و تنها اگر نگاشت انقباضی یکتای $\gamma: X\to R(f)$ به

قسمی موجود باشد که $\gamma f = f\gamma$ و به ازای هر $x\epsilon X$ ، $\lim_{n\to\infty} d_f\big(f^n(x)),f^n(\gamma(y))\big) = 0$ و متر d^l روی X که بطور یکنواخت معادل با d به قسمی موجود است که f و γ تحت d^l نگاشت های غیر انبساطی هستند و $f|_{R(f)}$ نیز ایزومتریک است.

آکین و آسلاندر در ستا ۱۹۹۶ نشان دادند که هر خودنگاشت هم پیوسته متعدی از فضای متریک فشرده *(X,d)* با یک خودنگاشت ایزومتریک همریختی، مزدوج یکنواخت است. این شرط برای نگاشت های غیرمتعددی نیز برقرار است. در واقع با توجه به قضیه *1* و گزاره ۴ و ۳ نتیجه زیر حاصل می شود که یک نگاشت روی فضای متریک فشرده همپیوسته است اگر و تنها اگر با یک همریختی ایزومتریک مزدوج باشد.*[3]*

حاصلضرب نگاشت های همپیوسته

فرض کنید *(Y, ρ)* *(X,d)* دو فضای متریک و $W\subset X$ $V\subset Y$ مجموعه ای ناتهی باشد. متر $D_{d\rho} = max\{d,\rho\}$ روی $W\times V$ به صورت زیر تعریف میکنیم.

$$D_{d\rho}(w,v),(x,y)| = max\{d(w,x),\rho(v,y)\} \quad ,\forall (w,v),(x.y)\epsilon W\times V$$

(2)

فرض کنید $g: V\to V, h: W\to W$ دو نگاشت gپیوسته باشند نگاشت gرا همگرای نقطه وار به $v_0\in V$گوییم هرگاه برای هر $\lim_{n\to\infty} g^n(y) = v_0, y\in V$. حاصلضرب g وh به صورت $h\times g: (W\times V, D_{d\rho}) \to (W\times V, D_{d\rho})$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(3)(h\times g)(w,v) = \big(h(w),g(v)\big),\quad \forall (w,v)\epsilon W\times V$$

فرض کنیدS زیر مجموعه ناتهی از $W\times V$ باشد. اگرS تحت $(h\times g)$ ناوردا باشد آن گاه $(h\times g)|_S: S\to S$ یک زیر سیستم از$(h\times g)$ است.

قضیه ۳- فرض کنید *(X,d)*یک فضای متریک و $f: X\to X$ یک نگاشت پیوسته باشد. فرض کنید *R(f)*فشرده باشد و به ازای هر $x\in X$, $\omega(x,f) \neq \emptyset$. آنگاه fهمپیوسته است اگر و تنها اگر همریختی ایزومتریک بازگشتی نقطه وار h و نگاشت غیر انبساطی همگرای نقطه وار مانند g به نقطه ثابت v_0 به قسمی موجود باشند که fمزدوج یکنواخت با زیر سیستم $(h\times g)|_S$ باشد.

برهان: فرض کنید fیک نگاشت همپیوسته باشد. و d_f را باتوجه به (۱) در نظر بگیرید. متر d وd_f بطور یکنواخت معادل هستند. فرض کنید $\gamma: X\to W, W = R(f)$ یک انقباض باشد. آنگاه $\gamma f = f\gamma$ به ازای هر $x\epsilon X$ ، $\lim_{n\to\infty} d_f\big(f^n(x)),f^n(\gamma(x))\big) = 0$ وf و γ تحت d_f غیرانبساطی هستند و $f|_W: W\to W$ یک همریختی

ایزومتریک است. بنابراین متر d^l روی X موجود است که ۲- معادل با d_f است. برای راحتی کار میتوان جای d و d^l را عوض کرد در این صورت شرایط زیر رخ میدهد.

ه) نگاشت γ یک تصویر قائم وابسته به d است،

و) نگاشت f با توجه به d ، ۴-همپیوسته است،

ز) نگاشت $f|_W$ تحت متر d، ایزومتریک است.

فرض کنید یک متر روی $\mathbb{R}^X$ است و نگاشت های $\lambda: (X,d) \to (\mathbb{R}^X,)$ و $\xi = \lambda - \lambda\gamma: (X,d) \to (\mathbb{R}^X,)$ تعریف می شود. برای هر عدد صحیح نامنفی n و هر $y,x \in X$ که $d(x,\gamma(x) \le d(y,\gamma(y)), x \neq y$ و y عضوی از Wنباشد. در ادامه تغیر متغیر زیر را برای راحتی کار در نظر میگیریم.

$$x_n = f^n(x) \ , y_n = f^n(y)\ , a_n = d(x_n,\gamma(x_n)), b_n = d(y_n,\gamma(x_n)), S_n = d(x_n,y_n), t_n = d(\gamma(x_n),\gamma(y_n)), p_n = d(x_n,\gamma(y_n)), q_n = (y_n,(\gamma(y_n)))$$

ان گاه $q_n \le b_0, 0 < S_0, t_n \le S_n$. با توجه به $b_n = max\{a_n,t_n\}$ و $q_n = max\{b_n,t_n\}$. توجه داشته باشید λ یک نگاشت نشاننده ایزومتریک است. لذا بنابه شرایط (ه) و (و) خواهیم داشت.

$$\rho(\xi(x),\xi(y)) = \rho(\varphi_x - \varphi_{\gamma(x)}, \varphi_y - \varphi_{\gamma(y)}) \ge \rho(\varphi_x - \varphi_{\gamma(x)}, \varphi_y - \varphi_{\gamma(y)})(y) = S_0 + b_0 - q_0 \ge min\{s_0,b_0\} > 0 \tag{4}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\rho(\xi(x),\xi(y)) &= \rho(\varphi_{x_n} - \varphi_{\gamma(x_n)}, \varphi_{y_n} - \varphi_{\gamma(y_n)}) \\ &\le min\{\rho(\varphi_{x_n}, \varphi_{y_n}) + \rho(\varphi_{\gamma(x_n)}, \varphi_{\gamma(y_n)}), \rho(\varphi_{\gamma(x_n)}, \varphi_{\gamma(x_n)}) \\ &+ \rho(\varphi_{\gamma(y_n)}, \varphi_{\gamma(y_n)}) = min\{S_n + t_n, a_n + b_n\} \le 4\, min\{S_0 + t_0, a_0 + b_0\} \\ &\le 8\, min\{S_0, b_0\}\end{aligned} \tag{5}$$

و بنا به (1)و $\gamma^2 = \gamma$ ،

$$(6) \lim_{n\to\infty} \rho(\xi(y_n),\xi(y_n)) = \lim_{n\to\infty} \rho(\lambda(y_n),\lambda\gamma(y_n))$$

که برای هر $v_0 \in \mathbb{R}^X$ $x \in X$,$v_0(x) = 0$ را به عنوان مبدا در نظر داشته باشید. ان گاه $\xi(x) = v_0$ اگر و تنها اگر $x \in W$. قرار میدهیم $V = \xi(x)$ بنا به (4) و (5) با توجه به ρ , ۸_همپیوسته است و بنا به (6) ، همگرایی نقطه وار به v_0 است. فرض کنید $D_{d\rho} = max\{d,\rho\}$ متر روی $W \times \mathbb{R}^X$ و نگاشت

$\mu(\gamma,\xi):X \to W \times V(= W \times \mathbb{R}^X)$ را تعریف میکنیم. فرض کنید $h: f|_W: (W,d) \to (W,d), S = \mu(x)$. بنا به شرط (ز) که $W=R(f)$ ، hهمریختی ایزومتریک بازگشتی نقطه وار است. تو جه داشته باشید که $\gamma h = h\gamma$ و $\xi f = f\xi$ ایجاب میکند.

μ یک مزدوج یکنواخت از $f: (X,d) \to (X,d)$ به زیر سیستم $h \times g: (W \times V, D_{d\rho}) \to (W \times V, D_{d\rho})h \times g|_s: (S, D_{d\rho}) \to (S, D_{d\rho})$ است.

متر ρ_g روی V را به صورت زیر تعریف میکنیم. $\rho_g(u,v) = sup\{\rho(g^n(u), g^n(v)): n = 0,1,\dots\}$ در این صورت $\rho,\ \rho_g$ به طور یکنواخت معادل هستند و $g: (X,d) \to (X,d)$ غیر انبساطی است. فرض کنید $D_{d\rho} = max\{d, \rho_g\}$. انگاه $f: (X,d) \to (X,d)$ به طور یکنواخت مزدوج با $(h \times g)|_s: (S, D_{d\rho}) \to (S, D_{d\rho})$ است.

نگاشت گراف همپیوسته

برای فضای X ، شرایطی وجود دارد که نگاشت $f: X \to X$ همپیوسته می شود.

قضیه۴ : فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f: X \to X$ یک نگاشت پیوسته یکنواخت است. اگر مجموعه ناتهی و f_ناوردای X_0 به قسمی موجود باشد که $f|_{X_0}$ همپیوسته باشد و زیر مجموعه متناهی V از X_0 و اعداد صحیح مثبت $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ به قسمی موجودند که

$$f^{n_k}(X) \subset X_0 \cup B(V, 2^{-k}), (\forall k \in N) \qquad (7)$$

آنگاه f همپیوسته است.

برهان. فرض کنید

$$C=min\{d(x, \omega):\{x, \omega \}\subset V\cup f(V) , x\neq \omega \qquad (8)$$

آنگاه $C>0$. برای هر $\varepsilon \in (0,\frac{c}{3}]$ چون f پیوسته یکنواخت و $f|_{X_0}: X_0 \to X_0$ همپیوسته است $\varepsilon^l \in (0, \varepsilon]$ به قسمی موجود است که

$$f\ (B(x,\varepsilon^l)) \subset B(f(x),), (\forall k \in N) \qquad (9)$$

و

$$(10) f^i(B(x,\varepsilon) \cap X_0) \subset B(f^i(x),\varepsilon), (\forall k \in X_0, \forall i \in N)$$

فرض کنید $k \in N$ به قسمی موجود است که $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon^l}{2}$ و

$$(11) f\left(B(x,\tfrac{1}{2^{k-1}})\right) \subset B(f(x),\varepsilon^l), (\forall k \in N)$$

از ان جایی که هر $f^2,\ f^3, \ldots$ پیوسته یکنواخت هستند پس $\delta \in (0,\frac{1}{2^k}]$ به قسمی موجود است که

$$f^i(B(x,)) \subset B\left(f^i(x),\frac{1}{2^k}\right) \qquad (12)$$

به ازای هر $x \in X$ و هر $i \in \{1,2,\ldots,n_k\}$

با فرض اینکه برای هر $d(y,z) \leq \delta, z \in X$ جهت راحتی کار $y_i = f^i(y)$ و $z_i = f^i(z)$ به ازای هر $i \in N$.
لذا با توجه به (12)

$$d(y_i,z_i) \leq \frac{1}{2^k} \ ,\ (\forall\, 1 \leq i \leq n_k) \qquad (13)$$

حالت اول: اگر $\{ y_{n_k}, z_{n_k} \} \subset X_0$ آن گاه بنا به 10 و 13

$$d(y_i,z_i) \leq \varepsilon \ ,\ (\forall\, n_k \leq i) \qquad (14)$$

حالت دوم : اگر $\{ y_{n_k}, z_{n_k} \}$ زیر مجموعه X_0 نباشد آن گاه با توجه به $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon^l \leq \varepsilon \leq c/3$ و 7 و 8و 13 ، نقطه یکتای $v \in V$ به قسمی موجود است که $\{ y_{n_k}, z_{n_k} \}\text{-} X_0 \subset B(v,\frac{1}{2^{k-1}})$ با توجه به 13ایجاب می کند:

$$\exists v \in V\ s.t\ \{ y_{n_k}, z_{n_k} \} \subset B(v,\frac{1}{2^{k-1}})$$

برای $n_k \leq i$ $v_i = f^{i-n_k}(v)$. توجه اشته باشید که برای $n_k \leq i$ ،

$$f^i(X) \subset f^{n_k}(X) \subset X_0 \cup B(V,2^{-k})$$

در ادامه نگاشت روی گراف را مورد بررسی قرار میدهیم. گراف متناهی G، فضای متریک فشرده ای است که دارای تعداد متناهی زیر مجموعه ناتهی مانند V (مجموعه راس ها) است به قسمی که$G\text{-}V$ دارای تعداد متناهی مولفه های همبند است که با (۰و۱) همریخت هستند. خودنگاشت پیوسته از گراف G را نگاشت گراف می نامیم.

قضیه ۵: فرض کنید G یک گراف همبند و $f: G \to G$ یک نگاشت پیوسته باشد. آنگاهf بازگشتی نقطه وار است اگر و تنها اگر f همریختی متناوب یاG یک دایره وf با دوران گویا از دایره یکهS^l ، مزدوج توپولوژیک باشد [5]

توجه داشته باشید که هر همریختی متناوب روی یک فضای فشرده و هر دوران گویا از S^1 همپیوسته هستند. لذا بنا به قضیه 4نتیجه زیر را خواهیم داشت که هر نگاشت بازگشتی نقطه وار از گراف همبند پیوسته است.

قضیه ۶: فرض کنید Gیک گراف همبند با متر d و $f: G \to G$ نگاشت پیوسته باشد. انگاه شرایط زیر معادلند:

الف) نگاشت f همپیوسته است

ب)$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G) = R(f)$

ج) تحدید نگاشت f به $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G)$ همپیوسته است

د) تحدید نگاشت f به $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G)$ همریختی متناوب یا مزدوج توپولوژیک با دوران گویا از دایره یکه S^1 است.

برهان. الف) $\leftarrow$ ب) با توجه به گزاره ۴ حکم برقرار است.

ج) $\leftarrow$ الف): از آن جایی که Gفشرده و همبند است، به ازای هر $v \in V$ ، $f^n(G)$ نیز فشرده و همبند است.

فرض کنید$G_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G)$. با توجه به اینکه $G \supset f(G) \supset f^n(G) \supset \dots$ ، G_0زیر گراف ناتهی و همبند G است و $f(G_0) = G_0$ فرض کنید $V = G_0 \cap \overline{G - G_0}$. انگاه V مجموعه متناهی است. لذا به ازای هر $k, n_k \in N$ به قسمی موجود است که $f^{n_k}(X) \subset G_0 \cup B(V, 2^{-k})$. بنابراین به کمک قضیه4 خواهیم داشت، اگر $f|_{X_0}$ همپیوسته باشد انگاهf نیز هم پیوسته است.

ب) $\leftarrow$ ج) فرض کنید G_0 زیر گرافی مشابه در قسمت قبل در این اثبات باشد که$G_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(G)$. اگر $G_0 = R(f)$ انگاه $f|_{G_0}: G_0 \to G_0$ بازگشتی نقطه وار است و $f|_{G_0}$ همپیوسته است.

ب) $\leftrightarrow$ د) بنا به قضیه ۳ کاملا برقرا است.

تبصره ۱- فرض کنید G یک گراف همبند با مترd و G_0 یک زیرگراف همبند از G باشد. انگاه هر نگاشت پیوسته بازگشتی نقطه وار $f_0: G_0 \to G_0$ قابل گسترس به نگاشت همپیوسته $f: G \to G$ است. در واقع چون G_0 یک انقباض از G است، نگاشت انقباضی $\gamma: G \to G$ وجود دارد. فرض کنید $f = f_0\gamma: G \to G$ ، آنگاه f نگاشت پیوسته و گسترش از f_0 است. لذا بنا به قضیه 4 نگاشت f همپیوسته است.

اگر G یک گراف ناهمبند باشد، انگاه میتوان برای هر نگاشت پیوسته $f: G \to G$ $k \in N$ را به قسمی یافت که اشتراک هر مولفه همبند G با $f^k G$ مجموعه ای f^k_ناوردا باشد. لذا قضیه 6 برای گراف های ناهمبند نیز برقرار است.

منابع

1. *J. Camargo, M. Rincon and C. Uzcategui, Equicontinuity of maps on dendrites. Chaos, Solitons and Fractals 126 (2019), 1-6.*
2. J. Camargo, M. Rincon and C. Uzcategui, Equicontinuity of maps on dendrites. Chaos, Solitons and Fractals 126 (2019), 1-6.

3. *J.-H. Mai The structure of equicontinuous maps. Trans. Amer. Math. Soc. 355 no. 10 (2003), 4125-4136.*
4. J.-H. Mai The structure of equicontinuous maps. Trans. Amer. Math. Soc. 355 no. 10 (2003), 4125-4136.
5. *Jie-Hua Mai, Pointwise recurrent graph maps, to appear.*
6. M. Bruckner and J. Ceder, Chaos in terms of the map x —> co(x,f). Pacific J. Math. 156 no. 1 (1992), 63-96.
7. M. Bruckner and T. Hu, Equicontinuity of iterates of an interval map. Tamkang Journal of Mathematics 21 no. 3 (1990), 287-294.
8. *P. Szuca, F-limit points in dynamical systems defined on the interval. Cent. Eur. J. Math. 11 (2013), 170-176. EQUICONTINUOUS MAPPINGS ON TREES 21*
9. *T. X. Sun, G. W. Su, H. J. Xi and X. Kong, Equicontinuity of maps on a dendrite with finite branch points. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 33 (2017), 1125-1130.*
10. Vidal-Escobar and S. Garcia-Ferreira, About the Ellis semigroup of a simple k-od. Top. Appl. 265 (2019), 106756.