

## بررسی ارتعاش آزاد پانل استوانه ای پیزوالکتریکی مدرج تابعی تحت اثر میدان الکتریکی

مجید فرزانه<sup>۱</sup> و دکتر فرزانه براتی<sup>۲</sup>

۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان

۱ استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد همدان

\*نویسنده مسئول: majidfarzaneh63@yahoo.com

### چکیده

در این مقاله ارتعاش آزاد پانل استوانه ای از جنس پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت اثر میدان الکتریکی براساس تئوری الاستیسیته سه بعدی مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مواد در راستای ضخامت و طول پوسته تغییر میکند به این صورت که خواص مواد از یک لبه به لبه دیگر متغیر در نظر گرفته شده است.

معادلات تعادل و پایداری با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی و با بسط مثلثاتی مؤلفه های جابجایی و پتانسیل الکتریکی در جهت شعاعی و طولی، دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره ای جفت شده به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر کاهش میابد. مؤلفه های جابجایی و پتانسیل الکتریکی به صورت سری فوریه در جهت های شعاعی و طولی بگونه ای انتخاب میگردند که شرایط تکیه گاهی ساده لبه های محیطی و طولی را برآورده نمایند.

روش حل به صورت عددی و با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر تعمیم یافته و همینطور به کمک نرم افزار Abaqus میباشند.

ارتعاش پانل استوانه ای پیزوالکتریکی مدرج تابعی دو بعدی تحت میدان الکتریکی به عنوان مثال عددی با تغییر در پارامترهای شعاع، طول و تغییر در کسر حجمی در جداول و نمودارهایی ارائه شده و جهت صحت سنجی با مقالات معتبر مقایسه شده است.

**واژه های کلیدی:** پانل استوانه ای؛ پیزوالکتریک؛ مدرج تابعی؛ تئوری الاستیسیته سه بعدی

## ۱- مقدمه

در این مقاله ارتعاش آزاد پانل استوانه ای از جنس پیزوالکتریک مدرج تابعی تحت اثر میدان الکتریکی براساس تئوری الاستیسیته سه بعدی مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مواد در راستای ضخامت و طول پوسته تغییر میکند به این صورت که خواص مواد از یک لبه به لبه دیگر متغیر در نظر گرفته شده است. معادلات تعادل و پایداری با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی و با بسط مثلثاتی مؤلفه های جابجایی و پتانسیل الکتریکی در جهت شعاعی و طولی، دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره ای جفت شده به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر کاهش میابد. مؤلفه های جابجایی و پتانسیل الکتریکی به صورت سری فوریه در جهت های شعاعی و طولی بگونه ای انتخاب میگردند که شرایط تکیه گاهی ساده لبه های محیطی و طولی را برآورده نمایند. روش حل به صورت عددی و با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر تعمیم یافته (GDQ) و همینطور به کمک نرم افزار Abaqus میباشد. ارتعاش پانل استوانه ای پیزوالکتریک مدرج تابعی دو بعدی تحت میدان الکتریکی به عنوان مثال عددی با تغییر در پارامترهای شعاع، طول و تغییر در کسر حجمی در جداول و نمودارهایی ارائه شده و جهت صحت سنجی با مقالات معتبر مقایسه شده است. پیزوالکتریک بار الکتریکی ای است که در مواد جامد مشخصی به علت فشار مکانیکی انباشته می شود (به ویژه در کریستال ها، بعضی سرامیک ها و مواد آلی مانند استخوان، و پروتئین های مختلف). واژه پیزوالکتریک یعنی الکتریسیته ناشی از فشار که از لغت یونانی به معنای فشردن گرفته شده و الکتریک نماد عنبر است (یک منبع قدیمی جریان الکتریکی). اثر پیزوالکتریک از ارتباط خطی بین حالت مکانیکی و الکتریکی در مواد بلورین و شفاف بدون تقارن مرکزی درک می شود. اثر پیزوالکتریک یک فرایند برگشت پذیر است؛ موادی که به طور مستقیم اثر پیزوالکتریک (تولید داخلی بار الکتریکی به دلیل اعمال نیروی مکانیکی) را انباشته می کنند اثر پیزوالکتریک معکوس (تولید داخلی نیروی مکانیکی در اثر اعمال میدان الکتریکی) را نیز انباشته می کنند. **اثر پیزوالکتریک** (تولید پتانسیل الکتریکی در پاسخ به دما) در اواسط قرن هجدهم توسط کارل لینائوس<sup>۱</sup> و فرنز آپینوس<sup>۲</sup> مطالعه شد و با الهام از این موضوع رنه جاست هاووی<sup>۳</sup> و آنتونی سزار بکورل<sup>۴</sup> ادعا کردند بین فشار مکانیکی و بار الکتریکی رابطه ای وجود دارد همچنین اولین استفاده عملی از دستگاه های پیزوالکتریک، سونار (دستگاه کاشف زیردریایی بوسیله امواج صوتی) بود که در جنگ جهانی اول توسعه پیدا کرد. در سال ۲۰۱۳، ترابی و همکارانش [۱] یک تحلیل برای کمانش پوسته مخروطی مدرج تابعی با لایه های پیزوالکتریک را تحت بارهای حرارتی و الکتریکی را مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۳، هونگ<sup>۵</sup> [۲] رفتار کمانش و پس کمانش یک پانل استوانه ای از جنس ماده تابعی مدرج را تحت بارهای مکانیکی و ترمو دینامیکی را در معرض حرارت قرار داده و آن را بررسی نمود و در سال ۲۰۱۲، بداعی و همکارانش [۳] تحلیل ارتعاش آزاد و پاسخ دینامیکی یک پانل استوانه ای پیزوالکتریک تابعی مدرج را تحت تاثیر یک پالس وابسته به زمان را بررسی کردند همین طور استفاده موفقیت آمیز پیزوالکتریک در سونار موجب شد علاقه فزاینده ای در توسعه دستگاه های پیزوالکتریک ایجاد شود. در چند دهه بعد، مواد و کاربردهایی جدیدی از پیزوالکتریک کشف شد.

<sup>1</sup> Carl Linnaeus

<sup>2</sup> Franz Aepinus

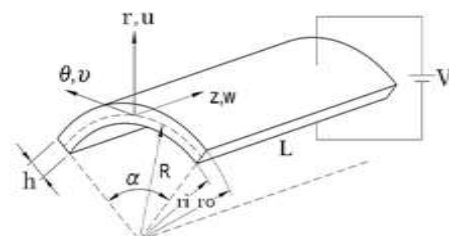
<sup>3</sup> René Just Haüy

<sup>4</sup> Antoine César Becquerel

<sup>5</sup> Hoang Van Tung

### مدل سازی مسئله

در اینجا به بررسی پاسخ استاتیکی و دینامیکی پانل پوسته استوانه ای کوتاه با شعاع  $R$  ضخامت  $h$  و طول  $L$  و زاویه مرکزی  $\alpha$  ساخته شده از مواد پیزوالکتریک تابعی مدرج دوبعدی که در جهت ( $r$  و  $Z$ ) مدرج شده است پرداخته میشود. پانل پوسته استوانه ای همچنین تحت میدان الکتریکی در جهت ضخامت خود می باشد. در شکل (۱) پانل مذکور به همراه محورهای مختصات نشان داده شده است.



شکل ۱- نمایش پوسته استوانه ای و سیستم مختصات بکار رفته در

آن

در اینجا، توزیع کسر حجمی برای هر نقطه در پانل با مختصات دلخواه  $(r, z)$  را میتوان با روابط زیر بیان کرد [۴]:

$$V_{p1}(r, z) = \left[ 1 - \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_r} \right] \left[ 1 - \left( \frac{z}{L} \right)^{n_z} \right]$$

$$V_{p2}(r, z) = \left[ 1 - \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_r} \right] \left[ \left( \frac{z}{L} \right)^{n_z} \right]$$

$$V_{p3}(r, z) = \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_r} \left[ 1 - \left( \frac{z}{L} \right)^{n_z} \right] \quad (1)$$

$$V_{p4}(r, z) = \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_r} \left( \frac{z}{L} \right)^{n_z}$$

در روابط فوق  $n_r$  و  $n_z$  دو ضریب ثابت و غیرصفر می باشد. بنابراین با توجه به توضیحات و روابط ذکر شده در فوق،

خواص ماده در هر نقطه دلخواه با مختصات  $(r, z)$  هم، با استفاده از رابطه ی زیر بیان میگردد [۴]:

$$P(r, z) = P_{p1} V_{p1} + P_{p2} V_{p2} + P_{p3} V_{p3} + P_{p4} V_{p4}$$

که در رابطه فوق  $P(r, z)$  یک خصوصیت ماده مثل چگالی، مدول الاستیسیته و ... میباشد. همچنین  $P_{pi}$  ( $i=1,2,3,4$ )

خواص مواد پیزوالکتریک و  $V_{pi}$  ( $i=1,2,3,4$ ) کسر حجمی مواد پیزوالکتریک می باشد. لازم به ذکر است در اینجا ضریب

پواسون ( $U$ ) را ثابت فرض کرده ولی سایر خصوصیات ماده از رابطه (۲) بدست می آوریم.

### معادلات حاکم بر پانل

معادلات رفتاری یک ماده با خاصیت پیزوالکتریک به صورت رابطه (۳) است [۵]:

$$\sigma = C \varepsilon - e^T E D = e \varepsilon + \mu E \quad (3)$$

در رابطه (۴) مؤلفه  $(i=r,\theta,z)E_i$  تنش نرمال،  $(i=r,\theta,z)\varepsilon_i$  کرنش نرمال،  $(i=r,\theta,z)E_i$  بردار میدان الکتریکی،  $D_i$  بردار جابجایی الکتریکی در سیستم مختصات استوانه ای  $(r,\theta,z)$  معرفی شده است. [۵]

$$\begin{aligned}\sigma &= [\sigma_r \ \sigma_\theta \ \sigma_z \ \tau_{r\theta} \ \tau_{rz} \ \tau_{r\theta}]^T \\ \varepsilon &= [\varepsilon_r \ \varepsilon_\theta \ \varepsilon_z \ \gamma_{\theta z} \ \gamma_{rz} \ \gamma_{r\theta}]^T \\ E &= [E_r \ E_\theta \ E_z]^T \\ D &= [D_r \ D_\theta \ D_z]^T\end{aligned}\quad (۴)$$

همچنین  $[C]$ ،  $[e]$ ،  $[\mu]$  بترتیب ماتریس های ثابت الاستیک، پیزوالکتریک و دی الکتریک هستند. معادله تعادل حاکم بر پانل با چشم پوشی از نیروی حجمی و معادله تعادل شارژ الکترواستاتیک در سیستم مختصات استوانه ای عبارتند از [۵]:

$$(۶) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$(۷) \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

(۸)

$$(۹) \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

که با توجه به خواص ما که در دو جهت شعاعی و طولی متغیر بوده اند به فرم زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}A_{1r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial C_{11}}{\partial r} + \frac{C_{11}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_{11} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial C_{12}}{\partial r} + \frac{C_{12}}{r} - \frac{C_{22}}{r} \right) - \frac{C_{66}}{r^2} \beta_m^2 + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial C_{55}}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} C_{55} \\ A_{1\theta} &= -\frac{1}{r} \beta_m \left( \frac{\partial C_{12}}{\partial r} - \frac{C_{66}}{r} + \frac{C_{12}}{r} - \frac{C_{22}}{r} \right) - \frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial}{\partial r} (C_{12} + C_{66}) \\ A_{1z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial C_{13}}{\partial r} + \frac{C_{13}}{r} - \frac{C_{23}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (C_{13} + C_{55}) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial C_{55}}{\partial z} \\ A_{1\psi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial e_1}{\partial r} + \frac{e_1}{r} - \frac{e_2}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (e_1 + e_5) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial e_5}{\partial z} \\ A_{2r} &= -\frac{1}{r} \beta_m \left( \frac{\partial C_{66}}{\partial r} + \frac{C_{22}}{r} + 2 \frac{C_{66}}{r} \right) - \frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial}{\partial r} (C_{66} + C_{12}) \\ A_{2\theta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial C_{66}}{\partial r} + \frac{C_{66}}{r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial C_{66}}{\partial r} + 2 \frac{C_{66}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_{66} - \frac{C_{22}}{r^2} \beta_m^2 + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial C_{44}}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} C_{44} \\ A_{2z} &= -\beta_m \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{C_{23}}{r} + \frac{C_{44}}{r} \right) - \frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial C_{44}}{\partial z}\end{aligned}\quad (۹)$$

$$\begin{aligned}
 A_{2\psi} &= -\frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial}{\partial z} (e_2 + e_4) - \frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial e_4}{\partial z} \\
 A_{3r} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial C_{55}}{\partial r} + \frac{C_{23}}{r} + \frac{C_{55}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (C_{55} + C_{13}) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial C_{13}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_{23}}{\partial z} \\
 A_{3\theta} &= -\frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial}{\partial z} (C_{44} + C_{23}) - \frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial C_{23}}{\partial z} \\
 A_{3z} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial C_{55}}{\partial r} + \frac{C_{55}}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_{55} - \frac{1}{r^2} \beta_m^2 C_{44} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial C_{23}}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} C_{23} \\
 A_{2\psi} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial e_5}{\partial r} + \frac{e_5}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} e_5 - \frac{1}{r^2} \beta_m^2 e_4 + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial e_3}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} e_3 \\
 A_{4r} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial e_5}{\partial r} + \frac{e_5}{r} + \frac{e_2}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (e_1 + e_5) + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial e_1}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_2}{\partial z} \\
 A_{4\theta} &= -\frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial}{\partial z} (e_4 + e_2) - \frac{1}{r} \beta_m \frac{\partial e_2}{\partial z} \\
 A_{4z} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial e_5}{\partial r} + \frac{e_5}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} e_5 - \frac{1}{r^2} \beta_m^2 e_4 + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial e_3}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} e_3 \\
 A_{4\psi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial r} + \frac{\mu_1}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mu_1 + \frac{\mu_2}{r^2} \beta_m^2 - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mu_3}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mu_3
 \end{aligned}$$

که با توجه به تکیه گاه ساده در لبه ها در طول ( $z=0$  ,  $z=L$ ) خواهیم داشت:

$$u_{rij} = 0, u_{\theta ij} = 0, \psi = 0$$

$$\sigma_z = c_{13} \sum_{k=1}^M d_{jk} U_{rik} + c_{23} \frac{1}{r} U_{rij} + c_{23} \frac{1}{r} \beta_m U_{\theta ij} + c_{33} \sum_{k=1}^N c_{ik} U_{zkj} + e_3 \sum_{k=1}^N c_{ik} \psi_{kj} \quad (10)$$

برای بی بعد سازی فرکانس آزاد کافی است در مواد FGM از رابطه زیر استفاده گردد [۳]:

$$D = E_m h^3 / (12(1 - \nu_m^2)) \quad (11) \quad \Omega = \omega L_y \sqrt{\frac{\rho_m h}{D}}, \quad L_y = R\alpha$$

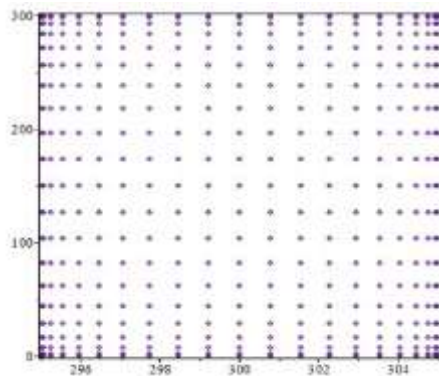
برای بی بعد سازی برای مواد FGPM از رابطه زیر میتوان بهره گرفت [۶]:

$$(12) \quad \Omega = \omega h \frac{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c_{11}}\right)_{F2T-4}}}{2\pi}$$

از معادلات بدست آمده، برای پیدا کردن فرکانس طبیعی سیستم، جابجایی و تنش ها می پردازیم که پاسخ ها را در نمودارها و جداول میاوریم. پاسخ های بدست آمده از حل روش GDQ و نرم افزار Abaqus، کدنویسی به کمک برنامه متلب همچنین مقالات مرتبط، مقایسه و مورد تحلیل قرار می گیرد

بررسی صحت نتایج

نتایج بدست آمده برای یک پانل استوانه ای از جنس مواد تابعی مدرج دوبعدی تحت میدان الکتریکی با شرایط مرزی تکیه گاه ساده را بر حسب تعداد نقاط نمایش میدهد. همانطور که مشاهده میشود برای تعداد نقاط بیشتر از ۲۳ تا نتایج همگرا شده است که برای محاسبات کنونی اطمینان از دقت محاسبات تعداد نقاط جدول شماره (۱) ۲۳ توزیع نقاط شبکه در شعاع داخلی ۰،۲۹۵ و شعاع خارجی ۰،۳۰۵ که در طول ۰،۳ متر قرار دارند را نشان می دهد.



شکل ۲ نمایش نقاط شبکه

جدول شماره (۱)

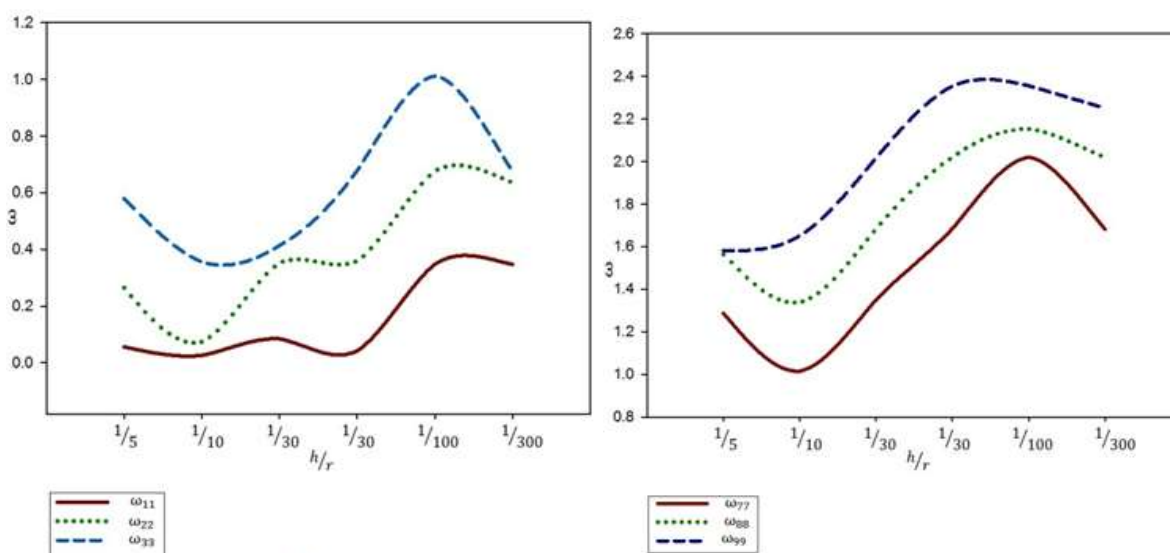
$L/R = 1, R = 300mm, h/R = 1/30, n_r = 1, n_z = 1$			
N(number of node)	$U e^{-11}$	$v e^{-11}$	$W e^{-11}$
5	-0.007620	0.0018265	0.000842
7	0.016094	-0.003857	0.001779
9	0.027961	-0.006701	0.003091
11	0.061865	-0.014828	0.006800
13	0.093873	-0.020104	0.009273
15	0.128914	-0.039610	0.012041
17	0.198793	-0.047384	0.199743
19	0.206438	-0.049482	0.022825
21	0.206438	-0.049482	0.022825
23	0.206438	-0.049482	0.022825

### مقایسه فرکانس طبیعی GDQM با نرم افزار Abaqus (خواص تابع شعاع)

در جدول (الف-۲) میزان فرکانس طبیعی در حالتی که میزان ضخامت به شعاع متوسط داده شده است آمده است. در این جدول میزان  $n_r = 1$  و  $n_z = 0$  و  $L/R = 1$  و شعاع متوسط (R) را برابر 0.3m و همچنین نسبت ضخامت به شعاع را برابر  $h/R = 1/50$  در نظر گرفته شده است. با تعریف  $n_z = 0$  به خاصه که خواص ما دیگر تابع طول نمی باشند می رسمیم. چون دیگر در فرمول های کسر حجمی که بیان گردید دیگر خواص طولی اثری در خواص کل مواد پیزوالکتریک ندارند. در جدول (الف-۳) واقه در پیوست هانیز برای  $h/r$  در مقدارهای مختلف، یعنی 1/5، 1/10، 1/30، 1/50 در نظر گرفته شده است. برای این مقادیر نسبت ضخامت به شعاع متوسط، ۱۰ فرکانس اول طبیعی محاسبه گردیده که با یکدیگر مقایسه شده است.  $n_z = 0$  نیز بار دیگر صفر در نظر گرفته شده است تا بتوانیم به کمک نرم افزار Abaqus، 10 شکل مد ارتعاشی اول برای ضخامت های مختلف را بدست آوریم و با همدیگر مقایسه کنیم.

### بررسی تاثیر در تغییر $h/r$ در فرکانس های طبیعی

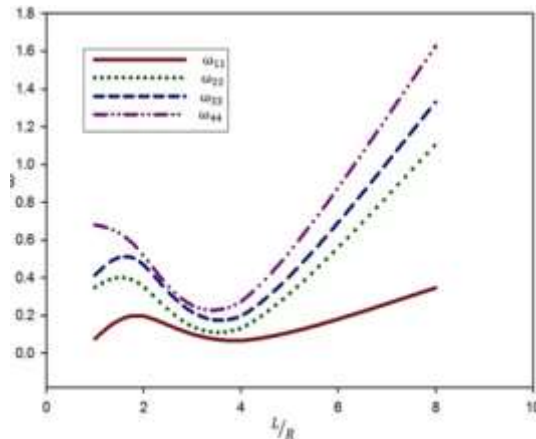
در جدول (الف-۴) واقه در پیوست ها نیز برای  $h/r$  در مقدارهای مختلف، یعنی 1/5، 1/10، 1/30، 1/50، 1/100، 1/300 در نظر گرفته شده است. در این جدول بر خلاف جدول های قبل از ضریب کسر حجمی های بالاتر از ۱ در نظر گرفته شده است. زاویه پانل نیز ۶۰ درجه و طول پانل هم برابر با شعاع متوسط که در اینجا R معرفی شده است، قرار دادیم.



شکل (۳)

### بررسی تاثیر در تغییر $L/R$ در فرکانس های طبیعی

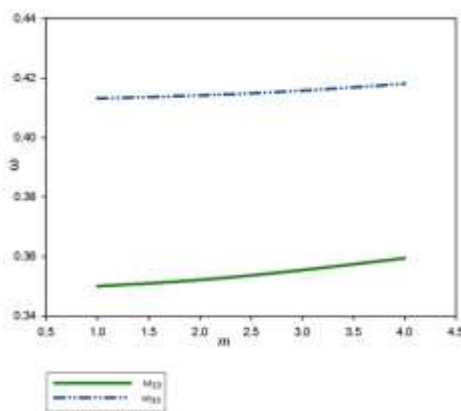
در جدول (الف-۵) واقع در پیوست ها نیز برای  $L/R$  در مقدارهای مختلف، یعنی 1,2,4,8 در نظر گرفته شده است. در این جدول بر خلاف جدول های قبل از ضریب کسر حجمی های بالاتر از 1 در نظر گرفته شده است. زاویه پانل نیز ۶۰ درجه و طول پانل هم برابر با شعاع متوسط که در اینجا  $R$  معرفی شده است، که برابر با  $0.3$  می باشد، قرار دادیم. ارقام بدست آمده در این بخش در شکل (۳) نیز آمده است. در این نمودارها فرکانس های، زیر آمده است:



شکل (۴) نمودار تاثیر در تغییر  $L/R$  در فرکانس های طبیعی

### بررسی تاثیر در تغییر عدد موج ( $m$ ) در فرکانس های طبیعی

در جدول (۶) نیز برای  $m$  در مقدارهای مختلف، یعنی 1,2,4,8 در نظر گرفته شده است. ضرایب کسر حجمی در راستای شعاع و طول نیز به ترتیب برابر با 2 و 3 در نظر گرفته شده است. زاویه پانل نیز 60 درجه و طول پانل هم برابر با شعاع متوسط که در اینجا  $R$  معرفی شده است، که برابر با 0.3 می باشد، قرار دادیم. ارقام بدست آمده در این بخش در شکل (۵) نیز آمده است. در این نمودارها فرکانس های، زیر آمده است.



شکل (۵)



### بررسی تاثیر در تغییر عدد کسر حجمی در راستای طول ( $n_z$ ) در فرکانس های طبیعی

برای مقادیرهای مختلف عدد کسر حجمی در راستای طول اعداد مختلفی را در نظر گرفتیم، یعنی 1,2,4,8 در نظر گرفته شده است. ضریب کسر حجمی در راستای شعاع نیز ثابت و برابر با واحد در نظر گرفته شده است. زاویه پانل نیز 60 درجه و طول پانل هم برابر با شعاع متوسط که در اینجا R معرفی شده است، که برابر با 0.3 می باشد، قرار دادیم.

### بررسی تاثیر در تغییر عدد کسر حجمی در راستای شعاع ( $n_r$ ) در فرکانس های طبیعی

در جدول (الف-۸) واقع در پیوست ها نیز برای مقادیرهای مختلف عدد کسر حجمی در راستای شعاع اعداد مختلفی را در نظر گرفتیم، یعنی 1,2,4,8 در نظر گرفته شده است. ضریب کسر حجمی در راستای طول نیز ثابت و برابر با واحد در نظر گرفته شده است. زاویه پانل نیز 60 درجه و طول پانل هم برابر با شعاع متوسط که در اینجا R معرفی شده است، که برابر با 0.3 می باشد، قرار دادیم.

### نتیجه گیری

۱- با تغییر در میزان کسر ضخامت به شعاع متوسط میزان فرکانس نیز تغییر میکند. یعنی با کاهش این مقدار، کاهش فرکانس در پانل را می بینیم. مد های فرکانسی نیز از مدل اول تا مد آخر نیز به صورت صعودی افزایش پیدا می کنند.

۲- تغییرات طول نسبت به شعاع بحث شده است. برای این تغییرات اعداد ۱،۲،۴،۸ در نظر گرفته شده است. میزان این تغییرات به این صورت میباشد که با افزایش طول پانل به شعاع پانل میزان فرکانس طبیعی سیستم افزایش می یابد. همچنین در هر حالت از تغییرات طول نسبت به شعاع، مد های فرکانسی از مد اول فرکانسی به بعد میزان عدد فرکانس به دست آمده رو به افزایش می باشد.

۳- با تغییر در عدد موج میزان فرکانس تغییر مینماید ولی این تغییرات ناچیز می باشند و با شیب کمی رو به افزایش می باشند.

۴- تاثیر در تغییر عدد کسر حجمی در راستای طول در تعیین فرکانس طبیعی پانل نیز به این صورت می باشد که با افزایش این عدد میزان فرکانس نیز تغییر می کند و این تغییرات رو به افزایش می باشد.

۵- تاثیر در تغییر عدد کسر حجمی در راستای شعاع در تعیین فرکانس طبیعی پانل نیز به این صورت می باشد که با افزایش این عدد میزان فرکانس نیز تغییر می کند و این تغییرات رو به به صورت سینوسی می باشد. همچنین در هر عدد کسر حجمی شعاعی فرکانس نیز از مد اول، رو به افزایش می باشد.

فهرست علائم

$v$

ضریب پواسون

$g$

شاخص کسر حجمی

پیوست ها

جدول (الف-۲)

$m = 1, \theta = \pi/3, R = 300, L/R = 1, n_r = 1, n_z = 0$										
$h/r$	$\omega_{11}$	$\omega_{22}$	$\omega_{33}$	$\omega_{44}$	$\omega_{55}$	$\omega_{66}$	$\omega_{77}$	$\omega_{88}$	$\omega_{99}$	$\omega_{10}$
$1/50$	0.0383	0.3711	0.5795	1.0782	1.5895	2.1055	2.6236	3.0689	3.1432	3.6628
$1/30$	0.0393	0.4976	0.5812	1.0783	1.5895	2.1063	2.1100	2.6236	3.1429	3.6628
$1/10$	0.0909	0.1691	0.5795	0.6499	1.0784	1.1720	1.5892	1.6066	2.0357	2.1057
$1/5$	0.0127	0.0553	0.1842	0.5817	0.5959	1.0789	1.2825	1.5899	2.1059	2.3809

جدول (الف-۳)

$m = 1, \theta = \pi/3, L/R = 1, n_r = 1, n_z = 0$										
$h/r$	$\omega_{11}$	$\omega_{22}$	$\omega_{33}$	$\omega_{44}$	$\omega_{55}$	$\omega_{66}$	$\omega_{77}$	$\omega_{88}$	$\omega_{99}$	$\omega_{10}$
$1/50$	0.0383	0.3711	0.5795	1.0782	1.5895	2.1055	2.6236	3.0689	3.1443	3.6628
ABAQUS	0.0392	0.3817	0.5997	1.1135	1.6091	2.2040	2.7167	3.1319	3.2346	3.7242
Error	2.34%	2.85%	3.48%	3.27%	1.23%	4.67%	3.54%	2.05%	2.87%	1.67%

جدول (الف-۴)

$m = 2, \theta = \pi/3, L/R = 1, n_r = 2, n_z = 3$										
$h/r$	$\omega_{11}$	$\omega_{22}$	$\omega_{33}$	$\omega_{44}$	$\omega_{55}$	$\omega_{66}$	$\omega_{77}$	$\omega_{88}$	$\omega_{99}$	$\omega_{10}$
$1/5$	0.0561	0.2646	0.5798	0.6856	0.8496	0.9962	1.2872	1.5644	1.5819	1.8099
$1/10$	0.0262	0.0742	0.3559	0.4635	0.6162	0.6841	1.0157	1.3388	1.6523	1.9558
$1/30$	0.0845	0.3521	0.4142	0.6798	1.0153	1.2130	1.3506	1.6850	2.0177	2.3485
$1/50$	0.0419	0.3592	0.6782	1.0137	1.1431	1.3459	1.6853	2.0205	2.3551	2.6888
$1/100$	0.3476	0.6769	1.0121	1.2479	1.3479	1.6839	2.0200	2.1534	2.3560	2.6917
$1/300$	0.3471	0.6370	0.6758	0.9517	1.0110	1.3465	1.6824	2.0184	2.2523	2.3536

جدول (الف-۵)

$m = 2, \theta = \pi/3, h/R = 1/30, n_r = 2, n_z = 3$										
$L/R$	$\omega_{11}$	$\omega_{22}$	$\omega_{33}$	$\omega_{44}$	$\omega_{55}$	$\omega_{66}$	$\omega_{77}$	$\omega_{88}$	$\omega_{99}$	$\omega_{10}$
1	0.0762	0.3500	0.4132	0.6797	1.0152	1.2125	1.3506	1.6849	2.0177	2.3485
2	0.1962	0.3514	0.4674	0.5159	0.6825	0.8499	1.0174	1.1850	1.3524	1.5196
4	0.0666	0.1322	0.1969	0.2729	0.3528	0.4344	0.5170	0.6000	0.6834	0.7588
8	0.3464	1.1061	1.3310	1.6278	1.9747	2.3475	2.7339	3.1297	3.5298	3.6410

جدول (الف-۶)

$h/r = 1/30, \theta = \pi/3, L/R = 1, n_r = 2, n_z = 3, R = 0.3$										
$m$	$\omega_{11}$	$\omega_{22}$	$\omega_{33}$	$\omega_{44}$	$\omega_{55}$	$\omega_{66}$	$\omega_{77}$	$\omega_{88}$	$\omega_{99}$	$\omega_{10}$
1	0.0762	0.3500	0.4132	0.6797	1.0152	1.2125	1.3506	1.6849	2.0177	2.3485
2	0.0845	0.3521	0.4142	0.6798	1.0153	1.2130	1.3506	1.6850	2.0177	2.3485
3	0.0920	0.3554	0.4158	0.6800	1.0156	1.2137	1.3506	1.6850	2.0178	2.3486
4	0.0983	0.3594	0.4181	0.6802	1.0159	1.2148	1.3507	1.6851	2.0178	2.3486

جدول (الف-۷)

$h/r = 1/30, m = 1, \theta = \pi/3, L/R = 1, n_r = 1, R = 0.3$										
$n_z$	$\omega_{11}$	$\omega_{22}$	$\omega_{33}$	$\omega_{44}$	$\omega_{55}$	$\omega_{66}$	$\omega_{77}$	$\omega_{88}$	$\omega_{99}$	$\omega_{10}$
1	0.0386	0.3691	0.4178	0.5791	0.7220	0.8284	1.0221	1.2394	1.6504	2.0610
2	0.1605	0.2185	0.3748	0.7409	1.1086	1.4761	1.8428	2.2085	2.5729	2.9358
4	0.3448	0.6826	1.0221	1.3614	1.7001	2.0380	2.3748	2.7105	3.0448	3.5285
8	0.1493	0.3242	0.6443	0.9661	1.2878	1.6090	2.2500	2.5695	2.8882	2.9883

جدول (الف-۸)

$h/r = 1/30, m = 1, \theta = \pi/3, L/R = 1, n_r = 1, R = 0.3$										
$n_z$	$\omega_{11}$	$\omega_{22}$	$\omega_{33}$	$\omega_{44}$	$\omega_{55}$	$\omega_{66}$	$\omega_{77}$	$\omega_{88}$	$\omega_{99}$	$\omega_{10}$
1	0.0386	0.3691	0.4178	0.5791	0.7220	0.8284	1.0221	1.2394	1.6504	2.0610
2	0.1605	0.2185	0.3748	0.7409	1.1086	1.4761	1.8428	2.2085	2.5729	2.9358
4	0.3448	0.6826	1.0221	1.3614	1.7001	2.0380	2.3748	2.7105	3.0448	3.5285
8	0.1493	0.3242	0.6443	0.9661	1.2878	1.6090	2.2500	2.5695	2.8882	2.9883

#### منابع

- [۱]. J. Torabi, Y. Kiani, M.R. Eslami . Linear thermal buckling analysis of truncated hybrid FGM conical shells. Composites: Part B 50 (2013) 265–272 .
- [2]. Hoang Van Tung , Postbuckling behavior of functionally graded cylindrical panels with tangential edge constraints and resting on elastic foundations. Composite Structures 100 (2013) 532–541.
- [3]. B. Sobhani Aragh · H. Hedayati . Static response and free vibration of two-dimensional functionally graded metal/ceramic open cylindrical shells under various boundary conditions.
- [4]. M. Asgari, M. Akhlaghi, Transient thermal stresses in two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length, September 2008

[5]. محمد رضا صدیقی صابر، محمود شاکری، علیرضا دانش مهر، حل الاستیسیته سه بعدی پانل استوانه ای پیزوالکتریک تک

لایه تحت بار دینامیکی، مجله مهندسی مکانیک، سال چهل و یکم شماره ۱، تابستان ۱۳۸۸

[۶]. M. Bodaghi, M. Shakeri, An analytical approach for free vibration and transient response of functionally graded piezoelectric cylindrical panels subjected to impulsive loads, January 2012.

[۷]. A. Loghman, M. Abdollahian, A. Jafarzadeh Jazi, A. Ghorbanpour Arani. Semi-analytical solution for electromagnetothermoelastic creep response of functionally graded piezoelectric rotating disk. International Journal of Thermal Sciences 65 (2013) 254e266.

[۸]. A. Ghorbanpour Arani, R. Bakhtiari, M. Mohammadimehr, M. R. Mozdianfard.

Electromagnetomechanical responses of a radially polarized rotating functionally graded piezoelectric shaft